

Topologie cosmique

Par Elisa Brune et Jean-Pierre Luminet

Qu'advierait-il des jumeaux de Langevin, dont l'un découvre, après un aller et retour vers une planète lointaine, qu'il est plus jeune que son frère resté à Terre, s'ils vivaient dans un espace multiconnexe?

Le célèbre paradoxe des jumeaux est une des difficultés apparentes de la théorie de la relativité d'Einstein. Semblant contredire l'idée de base selon laquelle les points de vue de différents observateurs doivent être symétriques, il met violemment en lumière les conditions mêmes de cette symétrie. Mais ce n'est qu'après avoir été résolu par une bonne compréhension de la théorie que ce paradoxe devient réellement intéressant, car il se pose de nouveau, plus puissant, dans un contexte élargi.

En relativité restreinte, les intervalles d'espace et de temps perdent séparément leur statut absolu au profit de deux nouveaux invariants : la vitesse de la lumière dans le vide, et l'intervalle d'espace-temps. La vitesse de la lumière dans le vide est la même pour tous les observateurs, quel que soit leur état de mouvement – il s'agit d'un principe dont Einstein est parti pour construire sa théorie, et d'un fait observé dans les célèbres expériences de Michelson et Morley. Combiné au principe de relativité - les lois de la physique sont les mêmes dans tous les systèmes de référence inertiels, c'est-à-dire en mouvement rectiligne uniforme (à vitesse constante) les uns par rapport aux autres -, ce principe mène à des effets curieux tels que la dilatation du temps et la contraction des longueurs. L'horloge d'un système en mouvement paraît battre plus lentement que celle d'un système au repos, tandis que les distances paraissent raccourcir. Comme la notion de mouvement est une notion relative, ces effets sont totalement symétriques. L'observateur en mouvement se considère au repos et voit l'autre système se mouvoir par rapport à lui. Il voit donc les horloges de l'autre système ralentir. Jusqu'ici, il n'y a pas paradoxe, même s'il semble curieux que chacun perçoive l'autre plus jeune qu'il ne se perçoit (voir encadré 1 « La dilatation du temps en relativité restreinte »).

Prenons maintenant deux horloges qui sont synchronisées dans le même système de référence. Que se passe-t-il si l'une part à bord d'un vaisseau spatial et revient au terme d'un long voyage ? Dans l'article de 1905 qui fonde la relativité restreinte, Einstein montre qu'à son retour l'horloge voyageuse marque un temps plus court que l'horloge au repos. Autrement dit, la symétrie est brisée, les deux points de vue ne sont pas équivalents. Cette conclusion, apparemment paradoxale, a été popularisée en 1911 par Paul Langevin au moyen d'un exemple célèbre. Soit des jumeaux dont l'un part vers une planète lointaine à une vitesse proche de celle de la lumière, fait demi-tour et revient. A son retour, le voyageur lit sur sa montre qu'il est parti six ans, alors que son frère resté sur terre a vieilli de quarante ans. Parler d'horloges ou de vieillissement est en l'occurrence équivalent, puisque les horloges biologiques se réduisent en dernière analyse à des horloges atomiques. Le jumeau sédentaire est réellement plus vieux que son frère.

Y a-t-il pour autant violation du principe de relativité ? Non, car ce principe vaut pour des systèmes inertiels, c'est-à-dire en mouvement rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres. Le voyageur qui prend le départ subit une accélération. Pour faire demi-tour, il décélère et accélère. A son retour, il décélère à nouveau. Cela signifie que, par rapport à son frère, il change autant de fois de système de référence - passant d'un système au repos à un système à vitesse v , puis de ce système à un autre système à vitesse $-v$, avant de revenir au système initial. Il ne se trouve donc plus dans une situation d'équivalence. Langevin le premier a montré que parmi toutes les lignes d'univers qui relient deux événements dans l'espace-temps, celle qui possède le temps propre – à savoir le temps qui s'écoule dans le système de référence au repos - le plus long et induit donc le vieillissement le plus rapide est la trajectoire sans accélération, c'est-à-dire celle du frère sédentaire (voir encadré 2: « Un exemple en chiffres »).

Dans ce contexte, l'histoire des jumeaux de Langevin, loin d'être un réel paradoxe, souligne simplement la limitation du principe de relativité. La symétrie des points de vue n'est vraie que

pour les systèmes de référence ne subissant aucune accélération.

La réalité de l'effet Langevin a été mesurée avec précision grâce aux accélérateurs de particules du Cern. Des muons, particules instables qui se désintègrent normalement au bout de 1,5 microsecondes, ont été accélérés jusqu'à atteindre 0,9994 fois la vitesse de la lumière. Leur temps de vie apparent, dans le référentiel du laboratoire, est alors de 44 microsecondes, soit trente fois supérieur à celui des muons qui n'ont pas été accélérés – cela en parfait accord avec la relativité restreinte.

Bien évidemment – et contrairement à ce qui est hélas affirmé dans l'Encyclopédie Hachette Multimédia utilisée par de nombreux étudiants et professeurs de physique du secondaire -, le traitement complet du problème des jumeaux dans le cadre de la relativité générale donne les mêmes résultats. En effet, le principe de relativité assure toujours que les lois de la physique gardent la même forme dans les systèmes de référence inertiels, et qu'il existe donc des transformations mathématiques permettant de passer d'un système inertiel à un autre. En relativité générale, c'est-à-dire en présence d'accélération et de champs gravitationnels, les référentiels inertiels sont les systèmes en chute libre, et les équations qui permettent de passer d'un système à l'autre ne sont plus celles de Lorentz mais celles de Poincaré. Dans le cas du problème des jumeaux, cela implique, comme en relativité restreinte, que la situation n'est jamais symétrique. C'est toujours le voyageur ayant changé de référentiel inertiel qui aura vieilli moins vite que celui n'en ayant pas changé.

Le paradoxe semble ainsi résolu pour de bon. Sauf si surgit une question bizarre : que se passe-t-il si le jumeau rejoint son frère sans jamais subir d'accélération ? Il suffirait pour cela que l'espace soit fermé, tel un cylindre ou un tore, pour prendre un exemple d'espace à deux dimensions, plus facile à visualiser. Ce type d'espace est parfaitement euclidien, accepte une physique en tous points décrite par la relativité restreinte et ne peut a priori être exclu comme modèle de l'espace cosmique. Or il pose de nouveau, et avec acuité, le paradoxe des jumeaux. Dans un espace fermé, les deux frères sont susceptibles de se retrouver au même endroit non parce que le voyageur est revenu sur ses pas, mais parce qu'il a fait le tour de l'univers sans changer de direction. La situation devrait donc rester symétrique et leurs points de vue se montrer réversibles. Or il n'en est rien. Le voyageur, à nouveau, est plus jeune que son frère. Et ce n'est toujours pas un paradoxe. Mais le comprendre nécessite d'envisager d'une manière plus large la notion de symétrie.

Pour faciliter le raisonnement, on visualise la situation dans un espace à deux dimensions seulement - plus le temps. Parmi les cinq types de surfaces à géométrie euclidienne (voir encadré 3: « B.a.-ba de topologie »), nous choisissons le tore, qui est une surface fermée dans les deux directions. Les conclusions seront exactement transposables dans le cas de l'espace-temps à quatre dimensions - trois spatiales plus une temporelle. Afin d'illustrer tous les scénarios possibles, élargissons l'exemple des jumeaux à une famille de quadruplés (voir la fig1: « De l'espace à l'espace-temps »). Le frère 1 reste chez lui, au point O, et sa ligne d'univers peut être identifiée avec l'axe du temps, de sorte qu'il arrive en O' sur le diagramme d'espace-temps. Le frère 2 quitte la maison au temps $t=0$, voyage en fusée, rebrousse chemin et vient rejoindre le frère 1 en O' au bout d'un temps t' . Les frères 3 et 4 – dont on suppose ici qu'ils connaissent par avance la longueur de leur trajet, en fonction de quoi ils adaptent leur vitesse de façon à arriver ensemble en O' - partent également au temps $t=0$, mais voyagent toujours en ligne droite selon des lignes d'univers non accélérées s'éloignant de O. Au bout des temps respectifs t'' et t''' , tous deux se retrouvent aux points O'' et O''', c'est-à-dire O' parce que l'espace est fermé. L'un a bouclé une circonférence autour du grand axe du tore, et l'autre autour du petit axe. Quel est maintenant l'âge comparé des quadruplés ?

Fig. 1 : De l'espace à l'espace-temps

Le frère 2 ne pose guère de problème, puisqu'il tombe sous le coup du paradoxe standard. Il a suivi une ligne d'univers accélérée, il est donc plus jeune que le frère 1. Mais les frères 3 et 4, eux, n'ont à aucun moment changé de système de référence. Et pourtant, ils sont plus jeunes également. C'est que leur état de mouvement, bien que non accéléré – l'accélération de départ peut être négligée si l'on considère que les trajectoire 1 et 2 se croisent sans s'arrêter, leurs horloges étant comparées juste lors de leurs croisements –, n'est pas pour autant équivalent à celui du frère 1. Cette asymétrie s'explique par des raisons topologiques profondes qui mettent en jeu la notion de multiconnexité.

Si l'on dessine des courbes fermées sur une surface quelconque, deux cas de figure sont possibles. Soit le lacet ainsi tracé peut être resserré sans rencontrer d'obstacle et se résorber en un point; c'est le cas de toutes les courbes fermées sur le plan euclidien ou sur une sphère, par exemple. Soit le lacet ne peut être resserré jusqu'au bout parce qu'il entoure un trou, comme dans le cas du cylindre ou du tore; ces surfaces ont une topologie dite « multiconnexe ». Dans un tel espace, les trajectoires (ou lacets) sont homotopiques ou non, selon qu'on parvient à les réduire ou non l'une à l'autre au moyen d'une transformation continue. Dans notre exemple, les trajectoires des frères 1 et 2 sont homotopiques, car la boucle de 2 ne fait pas le tour de l'univers et peut donc être resserrée en un point. Pour autant, elles ne sont pas équivalentes car seul 1 est resté dans un référentiel inertiel. On a montré que, parmi toutes les courbes homotopiques allant de O à O' , une seule correspond à un observateur inertiel, et que c'est donc lui qui vieillira le plus, comme prévu dans le paradoxe standard.

Les frères 3 et 4, eux, suivent des trajectoires qui bouclent autour de l'une des deux directions du tore. D'un point de vue topologique, on peut leur assigner un indice d'enroulement, c'est-à-dire un nombre entier qui compte le nombre d'enroulements autour de la surface. Dans le cas d'un tore, l'indice d'enroulement est un couple d'entiers: le premier compte ce nombre autour du petit axe, et le second autour du grand axe. Les frères 3 et 4 possèdent respectivement les indices d'enroulement $(1,0)$ et $(0,1)$. Est ainsi défini pour chaque voyageur un invariant topologique, dont la valeur n'est modifiée par aucun changement de coordonnées ou de cadre de référence. Les voyageurs qui empruntent des chemins possédant un indice d'enroulement différent se trouvent dans des classes d'homotopie différentes, c'est-à-dire dans des situations topologiquement non symétriques, ce qui explique que le frère 1 puisse être plus âgé que les frères 3 et 4. Et le paradoxe est levé. Les jumeaux vieillissent différemment même sans être accélérés, parce que toutes les trajectoires d'un espace multiconnexe ne sont pas équivalentes. Ainsi, pour que le temps propre des jumeaux soit équivalent, il ne suffit pas que leur mouvement soit équivalent en termes d'accélération, il faut aussi que leurs lignes d'univers se trouvent inscrites de manière équivalente dans l'espace-temps, cette dernière symétrie étant réalisée à travers les classes d'homotopie. La topologie de l'espace impose donc, parmi les référentiels inertiels, des référentiels privilégiés, et même si le principe de relativité reste valide localement, il ne l'est plus à l'échelle globale. C'est bien le signe que la théorie de la relativité n'est pas une théorie globale de l'espace-temps.

Pour préciser encore la description, proposons-nous de comparer non seulement l'âge des voyageurs avec celui du frère sédentaire, mais également l'âge des voyageurs entre eux. Il est clair que l'indice d'enroulement à lui seul ne fournit pas suffisamment d'information, sauf dans le cas du cylindre, dont l'indice d'enroulement se réduit à un seul nombre; on peut dire alors que, pour un parcours reliant deux points donnés, plus l'indice d'enroulement est grand, plus le temps propre – donc le vieillissement – est ralenti. En revanche, dans le cas d'un tore, dont les deux axes sont de longueur inégale, le résultat dépend du rapport de ces longueurs. Si le petit axe est beaucoup plus petit que le grand, un voyageur peut accomplir plusieurs fois le tour du petit axe, avec une indice d'enroulement $(n,0)$, tout en vieillissant plus que celui qui ne fait qu'un tour du grand axe, avec un indice d'enroulement $(0,1)$. Dans le cas d'un double tore – qui n'est plus une surface euclidienne mais hyperbolique –, pour lequel l'indice d'enroulement prend la forme d'un quadruplet d'entiers, il est très difficile de comparer les âges des voyageurs.

Si l'on veut résoudre la question complètement, il est indispensable d'introduire des informations

métriques. Un critère très simple permet, en fait, de procéder à des comparaisons chiffrées entre les âges des différents frères. Il suffit, pour l'extraire facilement, de représenter l'espace de départ sous la forme de son *espace de revêtement universel*. Rappelons que le tore est construit à partir d'un rectangle dont on colle les côtés opposés deux à deux. Si l'on recopie ce rectangle de façon à couvrir le plan, on symbolise l'espace tel qu'il apparaît à l'observateur situé en O, c'est-à-dire infini dans toutes les directions. Tous les points O sont cependant identiques, comme le sont deux points géographiques qui se répètent aux deux extrémités d'un planisphère. Dans cette représentation, le trajet du frère 2 apparaît comme une boucle qui revient au point O initial, sans passer par l'une de ses répliques, tandis que les trajets des frères 3 et 4 sont des géodésiques qui relient le point O à une réplique de lui-même, avec des indices respectifs d'enroulement de (1,0) et (0,1). Il y a bien des façons de décrire une boucle dans un espace fermé, et on pourrait ajouter les trajectoires 5 et 6, avec les indices (1,1) et (2,1) par exemple. Pour comparer les âges des différents frères, entre-temps devenus sextuplés, il suffit maintenant de comparer la longueur des segments qui relient la position de O dans son domaine fondamental, avec sa position au bout des différents trajets empruntés par les voyageurs. Plus ce segment est long, plus le voyageur vieillit lentement (vois la fig 2: « L'espace de revêtement universel »). Voilà un moyen simple de résoudre un problème en le transposant de la topologie multiconnexes à son espace de revêtement universel.

Fig. 2 : L'espace de revêtement universel

En conclusion, le paradoxe des jumeaux peut se ramener à deux cas de figure. Soit les jumeaux appartiennent à la même classe d'homotopie – les frères 1 et 2 dans l'exemple – et possèdent donc le même indice d'enroulement. Néanmoins, seul l'un des deux – ici le 1 – parcourt dans l'espace-temps un trajet qui relie le point de départ et le point d'arrivée tout en restant dans un seul système inertiel. Le frère 2, lui, change de système de référence via une accélération locale qui rend sa situation non symétrique par rapport au premier. Il vieillit moins vite.

Soit les jumeaux n'appartiennent pas à la même classe d'homotopie, suivent des trajets qui ne présentent pas le même degré d'enroulement et se retrouvent en un même point sans qu'aucun des deux ait changé de système d'inertie. Dans ce cas de figure, leurs situations ne sont pas symétriques, et le jumeau le plus vieux est celui qui a effectué le trajet le plus court.

Selon qu'il est invoqué en relativité restreinte standard ou dans un espace multiconnexes, le paradoxe des jumeaux permet donc de traquer deux erreurs de raisonnement différentes. La première tient à la définition du système de référence inertiel, mal comprise lorsque l'on affirme qu'un jumeau ne peut pas vieillir plus vite que l'autre. La seconde tient à la notion de rupture de symétrie d'espace-temps, qui ne peut pas se limiter au cas des systèmes accélérés, mais doit tenir compte des classes si l'on raisonne dans une topologie complexe.

A lire :

Jean-Pierre Luminet, L'univers chiffonné, Fayard, 2001

Jean-Philippe Uzan et al., The twin paradox and Space Topology, European Journal of Physics (2002), **23**, 277-284

Encadré 1 : La dilatation du temps en relativité restreinte

La dilatation apparente du temps est une conséquence directe de l'invariance de la vitesse de la lumière. Pour s'en convaincre, il suffit de comparer deux horloges identiques fonctionnant grâce à des impulsions lumineuses qui voyagent entre deux miroirs parallèles. Une des horloges est en mouvement rectiligne uniforme par rapport à l'autre, dans une direction parallèle à celle des miroirs. Soit un moment t_1 où les deux horloges sont synchronisées et où l'impulsion lumineuse part du premier miroir dans chacune d'elles. L'observateur du vaisseau 1 voit le rayon lumineux

parvenir au second miroir au temps t_2 – ce moment correspond au premier « tic » du tic-tac de son horloge. Dans l'intervalle, l'horloge du vaisseau 2 s'est déplacée par rapport au vaisseau 1, de sorte que le rayon lumineux n'a pas encore eu le temps d'y atteindre le second miroir. Pour l'observateur du vaisseau 1, elle a donc l'air de fonctionner plus lentement, puisque le tic-tac n'est pas synchronisé avec celui de sa propre horloge.

Deux vaisseaux spatiaux se croisent au temps t_1 et synchronisent leurs horloges. Au temps t_2 , le vaisseau 1 voit son horloge marquer le premier « tic », tandis que dans le vaisseau 2 qui a avancé, le rayon lumineux de l'horloge est encore loin d'atteindre le miroir. Pour l'observateur du vaisseau 1, l'horloge du vaisseau 2 bat plus lentement que la sienne.

Ce raisonnement est parfaitement réversible, puisque l'observateur lié à l'horloge en mouvement considère que c'est lui qui est au repos. Dans son système de référence, le « tic » de son horloge arrive en premier, l'autre étant retardé. Ainsi, les deux observateurs font des observations qui semblent contradictoires. Elles ne sont pourtant pas incompatibles. On parle précisément de dilatation *apparente* du temps, parce qu'il s'agit d'un effet lié à l'observation, et qu'il est possible de passer d'un point de vue à l'autre au moyen des équations de Lorentz, sans aucune incohérence mathématique. Le coefficient de dilatation du temps est donné par une simple application du théorème de Pythagore au dispositif des horloges à lumière décrit ci-dessus. On obtient : $t_2 = t_1 \sqrt{1 - v^2/c^2}$, où t_2 , le temps lu sur l'horloge en mouvement par l'observateur immobile, est plus petit que t_1 .

Cependant, dans tous les cas de mouvement rectiligne uniforme, le temps propre des deux horloges reste parfaitement identiques. Seules les mesures des deux observateurs divergent, chacun percevant l'autre horloge plus lente que la sienne. C'est cette symétrie qui est battue en brèche par le paradoxe des jumeaux, où il est question d'une différence entre les temps propres de deux horloges en mouvement. **Encadré 2 : Un exemple en chiffres**

Appelons les jumeaux Sédentaire et Voyageur. Sédentaire reste sur Terre tandis que Voyageur part vers une étoile E située à 10 années-lumière en voyageant à 90% de la vitesse de la lumière, soit environ 270 000 km/s, puis revient sur Terre à la même vitesse.

Dans cet exemple, le coefficient de dilatation du temps vaut $\sqrt{1 - 0,9^2} = 0,436$; donc, lorsque Sédentaire lit « 1 seconde » sur son horloge, il lit « 0,436 seconde » sur l'horloge de Voyageur qui s'éloigne à 0,9c. Et vice versa.

En fait, les diagrammes d'espace-temps permettent de résoudre graphiquement le problème, sans aucun calcul numérique! Il suffit en effet de prendre pour unité de distance l'année-lumière et pour unité de temps l'année. Les trajets des rayons lumineux sont alors les droites inclinées à 45° (pointillés rouge). Ils définissent ce que l'on appelle le "cône de lumière". Toutes les autres trajectoires possibles (en bleu pour celle de Voyageur, en vert pour celle de Sédentaire) sont inclinées de moins de 45° par rapport à la verticale.

Schéma 1: ALLER : CE QUE MESURE VOYAGEUR

Pour parcourir 10 a.l. À la vitesse de 0,9 c, il faut 11,1 ans. Or, d'après son horloge, Voyageur parvient en E au bout de 4,84 années (11,1 x 0,436) seulement. En outre,

Schéma 2: ALLER : CE QUE MESURE SEDENTAIRE

Sédentaire sait que Voyageur a dû arriver en E au bout de 11,1 années. Toutefois, les rayons lumineux envoyés de E mettent 10 ans à lui parvenir, en E'. Sédentaire ne voit donc

<p>arrivé en E, Voyageur voit la Terre telle qu'elle était en O', c'est-à-dire 1,1 année après son départ à l'horloge de Sédentaire. Conclusion : Voyageur a vu l'horloge de Sédentaire battre 4,36 fois plus lentement.</p>	<p>Voyageur arriver en E qu'au bout de 21,1 années. Conclusion : Sédentaire a vu l'horloge de Voyageur battre 4,36 fois plus lentement.</p>
<p><u>Schéma 3: RETOUR : CE QUE MESURE VOYAGEUR</u></p> <p>Voyageur rejoint la Terre en R au bout de 4,84 années. Mais, pendant ce temps, il a observé 21,1 ans (22,2-1,1) s'écouler sur la Terre. Conclusion : Voyageur a vu l'horloge de Sédentaire battre 4,36 fois plus vite</p>	<p><u>Schéma 4: RETOUR : CE QUE MESURE SEDENTAIRE</u></p> <p>Sédentaire voit tout le retour de Voyageur se dérouler en 1,1 an, et lui serre la main en R au bout de 22,2 ans. Conclusion : Sédentaire a vu l'horloge de Voyageur battre 4,36 fois plus vite</p>

Schéma 5: VOYAGE COMPLET

Lorsque Sédentaire et Voyageur se retrouvent en R, l'horloge de Sédentaire a battu 22,2 ans; celle de Voyageur 9,68 ans.

Ainsi, les deux aspects du paradoxe sont résolus de façon évidente par ces diagrammes d'espace-temps:

1/ Pourquoi la situation globale n'est-elle pas symétrique ?

Durant le voyage aller, les situations sont parfaitement symétriques car les deux référentiels inertiels de Voyageur et de Sédentaire sont en translation uniforme à vitesse relative v (schémas 1 et 2).

De même, les situations sont parfaitement symétriques durant le voyage de retour, car les deux référentiels inertiels de Voyageur et de Sédentaire sont en translation uniforme à vitesse relative $-v$ (schémas 3 et 4).

Si l'on considère le voyage complet, les trajectoires sont physiquement asymétriques car, en E, Voyageur - après avoir modifié sa vitesse, et donc subi une accélération -, a changé de référentiel inertiel (schéma 5).

2/ Pourquoi le temps propre de Voyageur est-il plus court que celui de Sédentaire?

On dit souvent que c'est à cause des accélérations et décélérations que doit subir Voyageur pour quitter Sédentaire en O, faire demi-tour en E et retrouver Sédentaire en R. Notons toutefois que les phases d'accélération en O et de décélération en R peuvent être supprimées si l'on considère que les trajectoires de Voyageur et de Sédentaire se croisent sans s'arrêter, leurs horloges étant comparées juste lors de leurs croisements. Reste le nécessaire changement de direction en E, se traduisant par une accélération de Voyageur. Mais c'est plutôt la géométrie particulière de l'espace-temps relativiste qui est responsable de la différence des temps propres. Voyons pourquoi.

Dans l'espace ordinaire, il est évident que dans n'importe quel triangle rectangle, le théorème de Pythagore indique $\Delta Z^2 = \Delta X^2 + \Delta Y^2$, ce qui implique que $\Delta Z < \Delta X + \Delta Y$.

Dans l'espace-temps de la relativité restreinte, dit « espace-temps de Minkowski », le théorème de Pythagore devient $\Delta S^2 = \Delta X^2 - c^2 \Delta T^2$, de sorte que ΔS est toujours plus long que $\Delta X + c\Delta T$! ΔS mesure justement le temps propre, et l'on voit bien qu'il s'annule pour $\Delta X = c\Delta T$, autrement dit pour $v = \Delta X/\Delta T = c$ - en ce sens, le photon, grain de lumière, ne vieillit jamais...

Encadré 3 : B.a.-ba de topologie

La topologie étudie les espaces du point de vue de leurs caractéristiques globales : nombre de dimensions, courbure, caractère ouvert ou fermé, connexité, orientabilité... Ainsi existe-t-il dix-huit variétés d'espaces à trois dimensions de type euclidien, c'est-à-dire non courbés. Toutes construites à partir de l'espace euclidien infini bien connu \mathbb{R}^3 , les variantes s'obtiennent en identifiant une portion donnée de cet espace bord à bord de diverses façons .

Se placer dans un espace à deux dimensions est une des manières de visualiser les descriptions.

En plus du plan euclidien infini \mathbb{R}^2 , il existe quatre variétés de surfaces euclidiennes, toutes construites à partir de lui. Le cylindre s'obtient par identification ou « collage » bord à bord des côtés opposés d'une bande infinie à bords parallèles; le ruban de Möbius, en tordant un bord afin d'inverser les points avant ce même collage; le tore, en procédant au collage des bords opposés d'un rectangle; la bouteille de Klein, en tordant ce deuxième bord avant le collage.

Les quatre surfaces euclidiennes multiconnexes

La deuxième colonne indique la forme du polygone fondamental et les identifications de points possibles, la quatrième colonne, le caractère fermé (aire finie) ou ouvert (aire infinie) de la surface; la cinquième, sa propriété d'être orientable ou non. Quand le domaine fondamental est un digone (cylindre, bande de Möbius), la surface est ouverte ; sinon elle est fermée.

Ces surfaces n'ont pas de courbure intrinsèque. La somme des angles d'un triangle y est toujours égale à 180° et elles ne sont courbées que dans une troisième dimension, impossible à percevoir pour un être qui vivrait dans le plan. On dit qu'elles sont localement euclidiennes. Le rectangle de départ est nommé « domaine fondamental ». Les transformations géométriques qui identifient les points bord à bord définissent la façon dont les objets vont se déplacer de manière continue dans cet espace, quittant le rectangle par un bord pour aussitôt réapparaître d'un autre côté.

Promenade sur un tore

Comme dans ces jeux d'arcade où les personnages qui sortent par un côté rentrent par le côté opposé, la tortue traverse le côté supérieur du carré en I , réapparaît par le côté inférieur, au point équivalent I' , poursuit son chemin en ligne droite, atteint le côté droit en J , réapparaît en J' , et ainsi de suite. Le tore est donc équivalent à un rectangle dont les bords opposés sont « identifiés » deux à deux.

Il est également possible de visualiser l'espace de manière continue en répétant un grand nombre de fois le domaine fondamental. On engendre ainsi l'espace de revêtement universel, dans lequel chaque point est répété autant de fois que le domaine lui-même. On peut ainsi tracer dans l'espace de revêtement les différents trajets reliant un point à lui-même, soit en sortant du domaine fondamental pour rejoindre une réplique, et il s'agit d'un trajet qui fait le tour de l'espace, soit en revenant vers le point original dans le domaine fondamental, et il s'agit d'un trajet en forme de lacet qu'on pourrait resserrer.

De l'espace multiconnexe à l'espace de revêtement universel.

Le tore a pour domaine fondamental un rectangle. En répétant celui-ci de proche en proche, on engendre l'espace de revêtement universel — ici, le plan euclidien \mathbb{R}^2 . Les trajets 2,3,4 relient tous le point 1 à lui-même. 2 est un lacet resserrable, contrairement à 3 et 4, qui font le tour de l'espace.

